数理解析研究所講究録
1080 巻 1999 年 71-82

非可換 C*- 環の Serre-Swan 定理

京大数理研 川村 勝紀 (Katsunori Kawamura) [1]

1 Introduction

この論説ではいわゆる Serre-Swan 定理 (compact Hausdorff 空間 Ω 上のベクトル束と Ω 上の連続な複素数値関数の作る環 $C(\Omega)$ の有限生成射影加群の対応) を一般の非可換な C*- 環に拡張する。ここで非可換とは一般に可換な場合も含むとする。もうすこし厳密に述べると、C*- 環 $\mathcal{A}$ の Hilbert C*- 加群 X に対し、$\mathcal{A}$ に付随する一様 Kähler 束上のある Hilbert 束 $\mathcal{E}_X$ があって X を Hilbert C*- 加群として $\mathcal{E}_X$ 上の切断のつくる $\mathcal{A}$ の加群に埋めこめることを述べる。第 2 節では一様 Kähler 束と非可換 C*- 環の関数環表現を説明する。第 3 節では Hilbert 束とその上の力学系を説明する。第 4 節で主定理とその証明を与える。その前に問題の背景を説明する。

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間、$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素のなす環とする。すると、作用素にその共役作用素を対応させる演算を $*$- 演算とし、作用素ノルムを環のノルムとして、$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ は非可換な C*- 環の例になる。一方、可換な C*- 環はある局所 compact Hausdorff 空間上の複素数値連続関数の作る環としていつでも表現できる (Gelfand 表現) 。特に単位元を持つ可換な C*- 環はある compact Hausdorff 空間上の複素数値連続関数の作る環としていつでも表現できる。この C*- 環と compact Hausdorff 空間の対応を一般の非可換な C*- 環に対して考え、$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 等をある仮想的な空間の関数環としてとらえるのがいわゆる非可換幾何の立場である ([3])。非可換幾何的に述べると、作用素不等式は関数不等式である。

$$A \geq B \quad (\text{作用素不等式}) \quad \Leftrightarrow \quad f_A \geq f_B \quad (\text{関数不等式}). \qquad (\text{Eq.1.1})$$

非可換幾何とは異なり、Cirelli, Manià, Pizzocchero 等 [2] は実際に単位元を持つ非可換な C*- 環を一様 Kähler 束上の関数環として忠実に表現した。こ

[1]e-mail : kawamura@kurims.kyoto-u.ac.jp.

こで、関数の積には各点での積に関数の微分に関する頁を加えた $*$- 積を導入する（本論説第 2 節 Eq.2.2参照）。従って、作用素不等式は一様 Kähler 束上の微分不等式（等号の時は微分方程式）と同値である。この意味で Eq.1.1の対応は意味を持つ。

このように強引に作用素不等式と関係させたうえで、本題のイントロダクションを始める。（以後の話は 作用素不等式とは直接関係は無い。）

一般に Serre-Swan 定理はいくつかの異なる形で述べられるが、その中から今回関係する形のものを述べると以下のようになる。

Theorem 1.1 *(Serre-Swan)* Ω を連結な *compact Hausdorff* 空間とする。$C(\Omega)$ を Ω 上の連続な複素数値関数のなす環とし、X を $C(\Omega)$ の加群とする。このとき、X は有限生成射影加群である必要十分条件は Ω 上のベクトル束 E があって、X は E 上の連続な切断たちのなす $C(\Omega)$ の加群 $\Gamma_c(E)$ と $C(\Omega)$ の加群として同型となることである。

$$X \cong \Gamma_c(E).$$

証明。[7]。 ∎

この定理より、$C(\Omega)$ 上の有限生成射影加群と Ω 上のベクトル束は 1 対 1 に対応することがわかる。非可換幾何では、定理 1．1 より非可換な C*- 環の場合にも C*- 環のある種の加群を C*- 環の（厳密には、C*- 環に対応する仮想的な空間の）ベクトル束と思うことがある（[10]）。そこで、Cirelli, Manià, Pizzocchero の結果を使って、一様 Kähler 束上のベクトル束（Hilbert 束）と Hilbert C*- 加群の関係を考える。

2　C*- 幾何

一般にある代数系（代数方程式、又は Noether 環等）に関する幾何という意味で素朴な代数幾何という概念を解釈した上で、C*- 環に対する代数幾何を C*- 幾何と呼ぶことにしよう。実際、C*- 環の情報を全て持つ（環を再構成できる）幾何学的対象が [2] で述べられている。通常の代数幾何における環 A の Spec$A$ は可換 C*- 環においては環の純粋状態の全体のつくる局所 compact Hausdorff 空間である。一般に非可換な C*- 環においては Spec$A$ に対応するものは 3 つの空間（純粋状態の全体、C*- 環の spectrum、、C*- 環の primitive spectrum）にわかれ、それらの中で大きいほうの 2 つの空間とそれらの間の写像により元

の環は記述される。

（可換）代数幾何	可換 C*- 環	非可換 C*- 環
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\swarrow \qquad \downarrow \qquad \searrow$
$\mathrm{Spec}\mathcal{A}$	$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$	$\mathcal{P}_{\mathcal{A}} \to \quad B \equiv \mathrm{Spec}\mathcal{A} \quad \to \mathrm{Prim}\mathcal{A}$

（上の図の中の矢印は上と下の対象が対応しているという意味である。）

本題の準備として、非可換 C*- 環の関数環表現 [2] の復習をする。まず、天下り的に環の元を表現する関数を定義する空間、一様 Kähler 束を定義する。

Definition 2.1 (μ, E, M) が一様 *Kähler* 束とは、以下の条件を満たす 3 つ組のことである。

(i). μ は位相空間 E から M への連続な全射。

(ii). E の位相は一様位相（*[1]*）。

(iii). 各ファイバー $E_m \equiv \mu^{-1}(m)$、$m \in M$ は *Kähler* 多様体（*[8]*）で、E からの相対位相は *Kähler* 位相と同値。

直観的には M という空間の各点の上に各点ごとに一般に異なる Kähler 多様体（例えば複素射影空間）が貼りついているものをイメージすると良い。ここでは局所自明性は仮定していない。

Theorem 2.1 $\mathcal{A}$ を単位元を持つ C^*- 環とし、$\mathcal{P}$ を $\mathcal{A}$ の純粋状態の全体の集合、B を $\mathcal{A}$ の *spectrum*（$= \mathcal{A}$ の既約表現の *unitary* 同値類の全体）、

$$p : \mathcal{P} \to B$$

を状態にその *GNS* 表現の同値類を対応させる写像とする。ここで、$\mathcal{P}$ には弱 $*$- 位相、B には *Jacobson* 位相（*[9]*）をいれて位相空間の構造を付加しておく。

このとき、$(p, \mathcal{P}, B)$ は一様 *Kähler* 束になる。

今後、定理 2.1の $(p, \mathcal{P}, B)$ を C*- 環 $\mathcal{A}$ に付随する一様 Kähler 束と呼ぶことにする。具体例は後で述べることにして、$\mathcal{A}$ に付随する一様 Kähler 束より $\mathcal{A}$ を再構成する。$\mathcal{P}$ 上の関数を考えると、各ファイバー $\mathcal{P}_b \equiv p^{-1}(b) \subset \mathcal{P}$、$b \in B$ は Kähler 多様体なのでその上では関数の微分や、Kähler 計量を考えることが

できる。そこで $C^\infty(\mathcal{P})$ をファイバーごとに滑らかな $\mathcal{P}=\cup_{b\in B}\mathcal{P}_b$ 上の複素数値関数の全体とする。$C^\infty(\mathcal{P})$ 上にいわゆる $*$- 積

$$m * l \equiv m \cdot l + \partial m(\mathrm{grad} l) \qquad \text{(Eq.2.2)}$$

$m, l \in C^\infty(\mathcal{P})$ と、関数の複素共役による $*$- 演算を定義すると、$(C^\infty(\mathcal{P}), *)$ は一般に非結合的な単位元を持つ $*$- 環になる。ここで grad$l$ は Kähler 計量による関数 l の勾配（gradient）の正則部分である。$\{\cdot,\cdot\}$ を $\mathcal{P}$ の各ファイバー上に定義された Kähler 形式により導入される Kähler 括弧とすると、関係式

$$m * l - l * m = \sqrt{-1}\{m, l\} \qquad \text{(Eq.2.3)}$$

が成り立つ。

Theorem 2.2 （非可換 C^*- 環の関数環表現）一般に非可換 C^*- 環 $\mathcal{A}$ の *Gelfand* 表現

$$f_A(\rho) \equiv \rho(A), \qquad A \in \mathcal{A}、\rho \in \mathcal{P}$$

は、単位的 $*$- 環の単射準同型

$$f : \mathcal{A} \to C^\infty(\mathcal{P})$$

を与える。ここで $C^\infty(\mathcal{P})$ には *Eq.2.2*で定義された $*$- 積による環の積の構造をいれてある。写像 f の像 $f(\mathcal{A})$ の中の関数 l に対し

$$\|l\| \equiv \sup_{\rho\in\mathcal{P}} |(\bar{l} * l)(\rho)|^{\frac{1}{2}}$$

は $*$- 環 $f(\mathcal{A})$ のノルムを定める。このノルムにより $(C^\infty(\mathcal{P}), *)$ の結合的な $*$- 部分環 $(f(\mathcal{A}), *)$ は $\mathcal{A}$ と同形な C^*- 環になる。

さらに $f(\mathcal{A})$ は次の関数空間 $\mathcal{K}_u(\mathcal{P}) \subset C^\infty(\mathcal{P})$ と一致する:

$$\mathcal{K}_u(\mathcal{P}) \equiv \left\{ l \in C^\infty(\mathcal{P}) : \begin{array}{c} D^2 l = 0, \quad \bar{D}^2 l = 0, \\ \bar{l} * l, \;\; l * \bar{l}, \;\; l \text{ は } \mathcal{P} \text{ 上で一様連続} \end{array} \right\}. \qquad \text{(Eq.2.4)}$$

ここで D, $\bar{D}$ は *Kähler* 多様体上の共変微分の正則部分と、反正則部分である。

従って、

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{K}_u(\mathcal{P}).$$

Eq.2.3より C*- 環の非可換性が Kähler 括弧 $\{\cdot,\cdot\}$ の歪対称性（≅ Kähler 形式の歪対称性）からきていることがわかる。

$$f_{[A,B]} = \sqrt{-1}\{f_A, f_B\}, \qquad A, B \in \mathcal{A}.$$

この式は、いわゆる非可換幾何の非可換性（環の元の交換子）が既知の幾何（Kähler 多様体）に現れる非可換性による説明が与えられたことを意味する。実際には C*- 環に付随する一様 Kähler 束のファイバーはすべて射影空間である。

Example 2.1 Ω を compact Hausdorff 空間とし $\mathcal{A} \equiv C(\Omega)$ とすると、$\mathcal{P} \cong \Omega \cong B, p : \mathcal{P} \cong B$. ここで Ω の各ファイバー $p^{-1}(b) = \{b\}$ は 0 次元 Kähler 多様体とみなす。従って Ω の各点での微分構造は潰れているので、$m * l = m \cdot l$, $\mathcal{K}_u(\Omega) \cong C(\Omega) = \mathcal{A}$.

例 2.1の意味で、定理 2.1、2.2は可換 C*- 環の Gelfand 表現の自然な一般化である。

Example 2.2 $\mathcal{A} \equiv M_n(\mathbf{C})$。このとき $\mathcal{P} \cong \mathbf{C}P^{n-1} \equiv (\mathbf{C}^n \setminus \{0\})/\mathbf{C}^\times$、$B$ は一点のみの集合。従って、一様 Kähler 束はファイバーを一つのみ持つ。この時、行列 $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ と射影空間 $\mathbf{C}P^{n-1}$ の点 $[h]$, $h \in \mathbf{C}^n, \|h\| = 1$ に対し等式

$$\begin{aligned} \partial_{[h]} f_A(\mathrm{grad}_{[h]} f_B) &= \mathrm{Cov}_h(A^*, B) \\ &\equiv \ < (A^*h- < h|A^*h > h)|(Bh- < h|Bh > h) > \end{aligned}$$

（A^* と B のベクトル h での共分散 [5]）

が成り立つ。これより

$$f_A * f_B = f_{AB}$$

がすぐにわかる。

同様に、有限次元 C*- 環の一様 Kähler 束は単に有限個の有限次元複素射影空間の和集合である。

Example 2.3 $\mathcal{A} \equiv \mathcal{L}(\mathcal{H})$、ここで $\dim\mathcal{H} = \infty$ と仮定する。すると、$\mathcal{P} \cong \mathcal{P}(\mathcal{H}) \cup \mathcal{P}_-$。ここで $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \equiv (\mathcal{H} \setminus \{0\})/\mathbf{C}^\times$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ のベクトル状態の全体の集合のなす無限次元射影 Hilbert 空間、$\mathcal{P}_-$ は $\mathcal{H}$ 上の compact 作用素の全ての上で 0 になる $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の純粋状態の全体。B は $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ が一点に射影された点と、$\mathcal{P}_-$ に対応する spectrum の集合の和集合になる。

3 Hilbert- 束

Hilbert C*- 加群を幾何学的に記述するための準備として、Hilbert- 束を定義する。

N を微分可能 Hilbert- 多様体とする。勿論、有限次元のときは N は通常の微分可能多様体である。

Definition 3.1 $(q,\mathcal{E},N)$ が N 上の *Hilbert-* 束とは

$$q:\mathcal{E}\to N$$

が N 上の局所自明なベクトル束で、各ファイバーが *Hilbert* 空間であるものである。

可換 C*- 環の Serre-Swan 定理（定理 1.1）は連続なクラスの（有限階数の）ベクトル束でこと足りている。しかし、第 2 節で説明したように、一般に非可換 C*- 環の積は Kähler 多様体上の微分構造により記述されているので、一様 Kähler 束の上のベクトル束にも spectrum のファイバーごとに微分構造を導入する必要があるであろうことが自然に推測される。さらに、可換 C*- 環の場合の Serre-Swan 定理の証明の通りに非可換 C*- 環の場合にベクトル束を構成すると、後で説明するように有限階数の Hilbert C*- 加群の場合でさえ各ファイバーのベクトル空間が一般に無限次元になることがわかる。ファイバーの Hilbert 空間の構造と局所自明性は Hilbert 加群の定義より導かれる。このような理由により、我々は微分可能なクラスの一般に無限次元のファイバーをもつ Hilbert- 束を考える。

次に加群としての構造を記述する 1 つの手段として、Hilbert- 束上の力学系を考える。

Definition 3.2 (ϕ,α) が *Hilbert-* 束 $(q,\mathcal{E},N)$ の自己同型とは、ϕ,α はそれぞれ $\mathcal{E},N$ 上の変換で、$q\circ\phi=\alpha\circ q$ を満たし、α は N の微分自己同型写像、ϕ は各ファイバー上で *unitary* 写像となるものである。

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{E} & \overset{\phi}{\cong} & \mathcal{E}\\ \downarrow & & \downarrow\\ N & \overset{\alpha}{\cong} & N\end{array}.$$

Definition 3.3 $(q,\mathcal{E},N,G)$ が *Hilbert-* 束 $(q,\mathcal{E},N)$ 上の群 G による力学系とは、G から $(q,\mathcal{E},N,G)$ の自己同型群への準同型存在するときをいう。つまり、

任意の $g \in G$ に対し $(q, \mathcal{E}, N)$ の自己同型 (ϕ_g, α_g) が存在して、$\phi_g \circ \phi_{g'} = \phi_{gg'}$, $\alpha_g \circ \alpha_{g'} = \alpha_{gg'}$, $g, g' \in G$.

ところで、幾何学的対象は Hilbert- 束上の力学系であるが、実際に C*- 環の加群に対応するのはベクトル束上の切断のなす関数環の加群である。$\Gamma(\mathcal{E})$ を Hilbert- 束上の力学系 $(q, \mathcal{E}, N, G)$ の形式的切断の全体の集合とする。つまり、$\Gamma(\mathcal{E})$ の元は q の右逆写像である。$\Gamma(\mathcal{E})$ に N の各点での像ごとのベクトル空間の和とスカラー倍によりベクトル空間の構造を入れる。さらに部分空間

$$\Gamma_b(\mathcal{E}) \equiv \{s \in \Gamma(\mathcal{E}) : \|s\| < \infty\},$$
$$\|s\| \equiv \sup_{x \in N}\|s(x)\|$$

を定義する。ここで $\|s(x)\|$ は $\mathcal{E}$ のファイバー $\mathcal{E}_x \equiv q^{-1}(x)$ での内積によるノルムである。すると、$\Gamma_b(\mathcal{E})$ は Banach 空間になり、各ファイバーの Banach 空間としての直和 $\bigoplus_{x \in N} \mathcal{E}_x$ に同型である。

群 G のベクトル空間 $\Gamma_b(\mathcal{E})$ への作用

$$\psi : G \to \mathrm{Aut}(\Gamma_b(\mathcal{E}))$$

を切断の平行移動の引き戻し

$$\psi_g(s)(x) \equiv \phi_g\{s(\alpha_{g^{-1}}(x))\} \qquad \text{(Eq.3.5)}$$

$s \in \Gamma_b(\mathcal{E}), x \in N, g \in G$ により定義する。すると、ψ は群の準同型になり任意の $g \in G$ に対し、ψ_g は Banach 空間 $\Gamma_b(\mathcal{E})$ 上の等長作用素になる。このようにして,

Proposition 3.1 *Hilbert-* 束上の群 G の力学系 $(q, \mathcal{E}, N, G)$ に対し、G の *Banach* 空間 $\Gamma_b(\mathcal{E})$ への *Eq.3.5*を満たす（等長）表現 ψ が存在する。

これより $\Gamma_b(\mathcal{E})$ は群 G の群環 $\mathcal{A}(G)$ の加群になる。

上記のような Hilbert- 束上の力学系が C*- 環の Hilbert 加群より自然に現れることを次の節で示す。

4 主定理

この節では C*- 環 $\mathcal{A}$ の加群と $\mathcal{A}$ に付随する一様 Kähler 束（定理 2.1）の Hilbert-束との対応を考える。特に C*- 環 $\mathcal{A}$ の加群としてよく研究されている Hilbert C*- 加群（[6]）についてどのような Hilbert- 束が現れるかを考える。その前に Hilbert C*- 加群を復習しておく。$\mathcal{A}$ を C*- 環とする。

Definition 4.1 X が $\mathcal{A}$ の *Hilbert* C^*- 加群とは X は $\mathcal{A}$ の右加群で、以下の性質を満たす $\mathcal{A}$- 値内積

$$<\cdot|\cdot>: X \times X \to \mathcal{A}$$

を持つものである:

(i). $(<\xi|\eta>)^* = <\eta|\xi>,$ $\qquad \eta, \xi \in X.$

(ii). $\|\xi\|^2 \equiv <\xi|\xi> \geq 0,$ $\qquad \xi \in X$ かつ $\|\xi\| = 0$ ならば $\xi = 0.$

(iii). $<\xi|\eta a> = <\xi|\eta> \cdot a,$ $\qquad \xi, \eta \in X,\ a \in \mathcal{A}.$

(iv). ノルム $\|\xi\|_X \equiv \||\xi|\| = \| <\xi|\xi> \|^{1/2}$, $\xi \in X$ により、X は *Banach* 空間になる。

Definition 4.2 *Hilbert* $\mathcal{A}$- 加群 X, Y に対し、X と Y が同型とは $\mathcal{A}$- 加群としての同型写像

$$T: X \to Y$$

が存在して任意の $\xi, \eta \in X$ に対し、

$$<T\xi|T\eta> = <\xi|\eta>$$

を満たすときをいう。

Example 4.1 (有限生成自由加群) $\mathcal{A}^n \equiv \underbrace{\mathcal{A} \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}}_{n}$ は

$$<\{a_i\}|\{b_i\}> \equiv \sum_i a_i^* b_i, \qquad \{a_i\}, \{b_i\} \in \mathcal{A}^n$$

を $\mathcal{A}$- 値内積とする Hilbert $\mathcal{A}$- 加群になる。

Example 4.2 C*- 環の閉右イデアルは Hilbert C*- 加群になる。

Example 4.3 $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$ を C*- 環とその部分 C*- 環とする。$\mathcal{A} \equiv \mathcal{C}' \cap \mathcal{B}$ (相対可換子)、$\phi \in \mathrm{End}\mathcal{C}$ に対し、$\mathcal{B}$ の部分集合

$$X_\phi \equiv \{x \in \mathcal{B} : \phi(c)x = xc, \ \ c \in \mathcal{C}\}$$

は Hilbert $\mathcal{A}$- 加群になる。

以下の構成法により、Hilbert C*- 加群 X より C*- 環に付随する一様 Kähler 束 $\mathcal{P}$ 上の Hilbert 束 $\mathcal{E}_X$ を定義する。

$\mathcal{A}$ の純粋状態 $\rho \in \mathcal{P}$ に対し

$$N_\rho \equiv \{\xi \in X : \rho(\|\xi\|^2) = 0\}$$

と定義すると、N_ρ は X の閉部分ベクトル空間になる。商空間

$$\mathcal{E}^o_{X,\rho} \equiv X/N_\rho$$

上に内積

$$< \cdot|\cdot >_\rho : \mathcal{E}^o_{X,\rho} \times \mathcal{E}^o_{X,\rho} \to \mathbf{C},$$
$$< [\xi]_\rho|[\eta]_\rho >_\rho \equiv \rho(< \xi|\eta >)$$

を定義する。ここで $[\xi]_\rho, [\eta]_\rho \in \mathcal{E}^o_{X,\rho}$, $[\xi]_\rho \equiv \xi + N_\rho$. この内積によるノルム $\|\cdot\|_\rho$ で $\mathcal{E}^o_{X,\rho}$ を完備化した Hilbert 空間を $\mathcal{E}_{X,\rho}$ とおく。これらを $\rho \in \mathcal{P}$ により和集合をとり、

$$\mathcal{E}_X \equiv \bigcup_{\rho \in \mathcal{P}} \mathcal{E}_{X,\rho},$$
$$\mathcal{E}^b_X \equiv \bigcup_{\rho \in \mathcal{P}_b} \mathcal{E}_{X,\rho}$$

とおく。ここで $\mathcal{P}_b \equiv p^{-1}(b) \subset \mathcal{P}$, $b \in B$.

Lemma 4.1 自然な射影

$$\Pi_b : \mathcal{E}^b_X \to \mathcal{P}_b$$

により $(\Pi_b, \mathcal{E}^b_X, \mathcal{P}_b)$ は *Kähler* 多様体 $\mathcal{P}_b$ 上の局所自明な正則 *Hilbert* 束になる。

従って、$(\Pi, \mathcal{E}_X, \mathcal{P})$ は Hilbert 束をファイバーに持つ spectrum B 上の束

$$(\Pi, \mathcal{E}_X, \mathcal{P}) = \bigcup_{b \in B} (\Pi_b, \mathcal{E}^b_X, \mathcal{P}_b) \qquad \text{(Eq.4.6)}$$

になる。$(p, \mathcal{P}, B)$ は一般に局所自明でないので $(\Pi, \mathcal{E}_X, \mathcal{P})$ そのものも局所自明とは限らないことに注意する。

次に $(\Pi, \mathcal{E}_X, \mathcal{P})$ 上の力学系を定義する。G を C*- 環 $\mathcal{A}$ の unitary 元全体の作る群とする。群 G は $\mathcal{P}$ に以下のように作用する。

$$\alpha_g(\rho) \equiv \rho \circ \mathrm{Ad}g^*, \qquad \rho \in \mathcal{P},\ g \in G.$$

すると、α は G の一様 Kähler 束としての各 $b \in B$ でのファイバーを保つ同型写像になる。さらに G の $\mathcal{E}_X$ への作用を

$$\phi_g([\xi]_\rho) \equiv [\xi \cdot g^*]_{\alpha_g(\rho)} \qquad [\xi]_\rho \in \mathcal{E}_X,\ g \in G$$

と定義すると、ϕ_g は $\mathcal{E}_X$ の各ファイバーの dense な部分集合 $\cup_{\rho\in\mathcal{P}}\mathcal{E}^o_{X,\rho}$ 上で well-defined かつ、有界な等長写像になるので $\mathcal{E}_X$ 上に一意に拡張できる。また、$\Pi \circ \phi_g = \alpha_g \circ \Pi$ が成り立つので、

Lemma 4.2 (ϕ,α) により $(\Pi,\mathcal{E}_X,\mathcal{P},G)$ は群 G の力学系になる。正確には $(\Pi_b,\mathcal{E}^b_X,\mathcal{P}_b,G)$ が群 G の定義 *3.3*の意味での力学系でかつ、(ϕ,α) は *Eq.4.6*の分解を保つ。

これと命題3.1より、$\mathcal{E}_X$ 上の切断の作る G の表現 $(\psi,\Gamma_b(\mathcal{E}_X))$ が定義される。従って、$\Gamma_b(\mathcal{E}_X)$ が G により生成される環 $\mathcal{A}$ の加群になる。ここで、

$$s \cdot a \equiv \psi_{a^*}(s), \qquad s \in \Gamma_b(\mathcal{E}_X), a \in \mathcal{A}$$

とおくと、$\Gamma_b(\mathcal{E}_X)$ は $\mathcal{A}$ の右加群で、Banach 空間、かつ、$\mathcal{A}$ の作用が連続なものになる。ここで Hilbert 束 $\mathcal{E}_X$ 上に Hermite 計量 H を以下のように定義する。

$$H : \Gamma_b(\mathcal{E}_X) \times \Gamma_b(\mathcal{E}_X) \to \mathcal{F}(\mathcal{P}),$$
$$H_\rho(s,s') \equiv < s(\rho)|s'(\rho) >_\rho, \qquad s,s' \in \Gamma_b(\mathcal{E}_X), \rho \in \mathcal{P}.$$

ここで $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ は $\mathcal{P}$ 上の（特に条件をつけていない）複素数値関数の集合とする。

Theorem 4.1 （非可換 C^*- 環の *Serre-Swan* 定理）写像

$$\sigma : X \to \Gamma_b(\mathcal{E}_X)$$

を

$$\sigma(\xi)(\rho) \equiv [\xi]_\rho, \qquad \xi \in X, \rho \in \mathcal{P}$$

にて定義する。すると、写像 σ の像 $\Gamma_u(\mathcal{E}_X) \equiv \sigma(X)$ は $\Gamma_b(\mathcal{E}_X)$ の $\mathcal{A}$- 右部分加群として X と同型である。さらに *Hermite* 計量 H は $\Gamma_u(\mathcal{E}_X)$ 上での値を $\mathcal{K}_u(\mathcal{P}) \cong \mathcal{A}$ （*Eq.2.4*）にとり、

$$\rho(< \xi|\eta >) = H_\rho(\sigma(\xi),\sigma(\eta)), \qquad \xi,\eta \in X, \rho \in \mathcal{P}$$

により、X と $\Gamma_u(\mathcal{E}_X) \subset \Gamma_b(\mathcal{E}_X)$ は *Hilbert* $\mathcal{A}$- 加群として同型になる。ここで、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{K}_u(\mathcal{P})$ は定理 *2.2*の *Gelfand* 表現により同一視している。

(証明の概略)

それぞれの定義と定理 2.2より

$$\begin{aligned} H_\rho(\sigma(\xi),\sigma(\eta)) &=< \sigma(\xi)(\rho)|\sigma(\eta)(\rho) >_\rho \\ &=< [\xi]_\rho|[\eta]_\rho >_\rho = \rho(< \xi|\eta >) = f_{<\xi|\eta>}(\rho). \end{aligned}$$

従って、$H(\sigma(\xi),\sigma(\eta)) \in \mathcal{K}_u(\mathcal{P})$.

$$H : \Gamma_u(\mathcal{E}_X) \times \Gamma_u(\mathcal{E}_X) \to \mathcal{K}_u(\mathcal{P}).$$

Hermite 計量 H は $\Gamma_u(\mathcal{E}_X)$ の上で $\mathcal{K}_u(\mathcal{P}) \cong \mathcal{A}$ に値を持つ。

$g \in G = \{\mathcal{A}$の unitary 元$\}$ に対し、

$$(\sigma(\xi)\cdot g)(\rho) = (\psi_{g^*}(\sigma(\xi))(\rho) = \phi_{g^*}\{\sigma(\xi)(\alpha_g(\rho))\} = [\xi\cdot g]_\rho = \sigma(\xi\cdot g)(\rho).$$

よって、$\sigma(\xi)\cdot g = \sigma(\xi\cdot g)$. 従って、$\sigma$ は $\mathcal{A}$- 加群の準同型に拡張できる。さらに

$$H(\sigma(\xi),\sigma(\eta)) * f_A = f_{<\xi|\eta>} * f_A = f_{<\xi|\eta>\cdot A} = f_{<\xi|\eta\cdot A>} = H(\sigma(\xi),\sigma(\eta\cdot A)),$$

$A \in \mathcal{A}$. これらのことより $\Gamma_u(\mathcal{E}_X)$ が X と同型な Hilbert $\mathcal{A}$- 加群になることがわかる。 ∎

Example 4.4 $X = \mathcal{A}$. このとき $\mathcal{E}_X$ の各ファイバーは $\mathcal{A}$ の純粋状態での GNS- 表現になる。ここで $\mathcal{A}$ が可換の場合と一般に非可換の場合にどうなるかを順に考える。

($\mathcal{A}$ が可換のとき) $\mathcal{E}_X$ のファイバーは全て 1 次元になる。さらに

$$G \cong \{f : \mathcal{P} \to \mathbf{C}; f\text{は連続}, |f| = 1\} \cong \{f : \mathcal{P} \to U(1); f\text{は連続}\}$$

となることより、補題 4.2の α は自明な作用 ($= B \cong \mathcal{P}$ の点を変えない写像) ϕ は各ファイバーの上の点を単にフェイズを回転させる作用になる ($U(1)$-ゲージ変換) 。従って、$\mathcal{A}$ の $\mathcal{E}_X$ の切断への作用は各ファイバー上での積になる。さらに $\mathcal{E}_X \cong \mathcal{P}\times\mathbf{C}$.

(一般に非可換のとき) $\mathcal{E}_X$ の純粋状態 ρ に対応するファイバー $\mathcal{E}_{X,\rho}$ の次元は $\mathcal{A}$ の ρ による GNS- 表現の次元になる。従って、一般には $\mathcal{E}_X \ncong \mathcal{P}\times\mathbf{C}$ さらに局所自明性も期待できない。さらに $\mathcal{A}$ が無限次元のときには、階数有限の自由加群でも $\mathcal{E}_X$ は無限次元 Hilbert 空間をファイバーに持つ Hilbert 束に対応している。この点で可換な C*- 環の時の結果とは一般に異なる。

References

[1] N.Bourbaki, *Elements of Mathematics, General topology part I*, Addison-Wesley Publishing company 1966.

[2] R.Cirelli, A.Manià and L.Pizzocchero, *A functional representation of noncommutative C^*-algebras* Rev.Math.Phys. Vol. 6, No.5 (1994) 675-697.

[3] A. Connes, *Non commutative differential geometry* , Publ.Math. IHES 62 (1986), 257-360.

[4] A. Connes, *Non commutative geometry*, Academic Press, Orlando, 1993.

[5] M.Fujii, T.Furuta, R.Nakamoto and S.Takahasi, *Operator inequalities and covariance in noncommutative probability*, Math.Japonica 16, No.2 (1997), 317-320.

[6] Kjeld Knudsen Jensen and Klaus Thomsen, *Elements of KK-Theory*, Birkhäuser (1991).

[7] Max Karoubi, *K-Theory An introduction*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1978).

[8] S.Kobayashi and K.Nomizu, *Foundations of differential geometry , vol I*, Interscience Publishers (1969).

[9] G.K.Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press (1979).

[10] Joseph C. Várilly and José M. Gracia-Bondía, *Connes'noncommutative differential geometry and the Standard Model*, J.Geometry and Physics 12 (1993) 223-301.